

ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАД ЧИСЛАМИ М INTEGRATION AND INTEGRATED TRANSFORMATIONS ABOVE NUMBERS OF M

Аннотация. Представлено интегрирование над числами М и аналог преобразования Фурье.

Summary. Integration above numbers of M and analogue of transformation Fourier is submitted.

В настоящее время актуальна проблема получения аналитических решений системы уравнений Максвелла. Такие решения необходимы для расчета и анализа электромагнитных резонаторов, направляющих систем и пространственных полей в радиотехнике и телекоммуникации.

Для получения решений системы уравнений Максвелла наибольшее распространение получили символический метод [1] и его обобщения – обобщенный символический метод [2] и многомерный символический метод [3], а так же теория дифференциальных уравнений [4]. Их использование ограничено определенным классом функций, в котором находится решение, либо математическими трудностями, связанными с необходимостью разделения переменных. Во многих практически важных случаях такие методы не дают аналитического решения. Теория функций комплексной переменной [5] адекватно описывает плоские стационарные электрические и магнитные поля. Возможность использования одного из вариантов расширения комплексных чисел – чисел М в электродинамике Максвелла показана в [6]. В [6] описаны числа М, их арифметика – сложение, вычитание, умножение и деление, а так же дифференцирование функций над числами М. Однако не была рассмотрена обратная операция - интегрирование. Поэтому целью данной работы является показать возможность введения интегрирования для функций над числами М. В дальнейшем будут использованы обозначения и понятия, введенные в [6].

ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Интегрирование для функций над числами М по некоторой кривой γ определим следующим образом.

Определим кривую на листе малой переменной следующим образом. Пусть на отрезке действительной оси $\delta \leq r \leq \chi$ задана функция $\lambda = \lambda(r)$, принимающая значения на листе малой переменной $\lambda = i \cdot x(r) + j \cdot y(r) + k \cdot z(r) + I \cdot t(r)$. Здесь $x(r)$, $y(r)$, $z(r)$ и $t(r)$ –

действительные непрерывные дифференцируемые функции. Аналогично определим кривую как однопараметрическую функцию со значениями на листе большой переменной $\Lambda = Ii \cdot X(r) + Ij \cdot Y(r) + Ik \cdot Z(r) + T(r)$.

Введем интегрирование над листом малой переменной λ функции F аналогично введению интегрирования в теории функций комплексного переменного (см., например, [4]). Разобьем кривую γ на частичные дуги γ_n конечным числом n точками λ_n , взятыми в порядке следования по кривой γ . Обозначим через l_n длину дуги [1], оканчивающейся точкой λ_n , и пусть $l = \max l_n$ – максимальная длина элементарной дуги из разбиения. Тогда определим интеграл от функции $F(\lambda)$ по кривой γ как следующий предел при стремлении максимальной длины элементарной дуги l к нулю:

$$\int_{\gamma} F(\lambda) d\lambda = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_n F(\lambda_n)(\lambda_n - \lambda_{n-1}), \quad (1)$$

где γ – контур интегрирования и $\lambda \in \gamma$. Функция $F(\lambda)$, в соответствии с [6], представляется в виде суммы действительных и мнимых составляющих. Соответственно, λ принадлежит листу малых переменных и представляется в виде суммы мнимых составляющих: $\lambda = I \cdot t + i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_n - \lambda_{n-1} = & I \cdot (t_n - t_{n-1}) + i \cdot (x_n - x_{n-1}) + \\ & + j \cdot (y_n - y_{n-1}) + k \cdot (z_n - z_{n-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

при $l \rightarrow 0$ соответствующие разности перейдут в действительные дифференциалы. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F(\lambda) d\lambda = & \int_{\gamma} (\alpha + i \cdot C_x + j \cdot C_y + k \cdot C_z + I \cdot \beta + Ii \cdot G_x + Ij \cdot G_y + Ik \cdot G_z) \times \\ & \times (I \cdot \partial t + i \cdot \partial x + j \cdot \partial y + k \cdot \partial z), \end{aligned} \quad (3)$$

Раскрывая скобки и выполняя умножение в соответствии с таблицей 1 умножения [6] получим представление интеграла (1) в виде суммы интегралов от действительных переменных:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} F(\lambda) d\lambda &= \int_{\gamma} -C_X \partial x - C_Y \partial y - C_Z \partial z - \beta \partial t + i \times \\
&\times \int_{\gamma} \alpha \partial x + C_Y \partial z - C_Z \partial y - G_X \partial t + \\
&+ j \cdot \int_{\gamma} \alpha \partial y - C_X \partial z + C_Z \partial x - G_Y \partial t + \\
&+ k \cdot \int_{\gamma} \alpha \partial z + C_X \partial y - C_Y \partial x - G_Z \partial t + \\
&+ I \cdot \int_{\gamma} \alpha \partial t - G_X \partial x - G_Y \partial y - G_Z \partial z + \\
&+ Ii \cdot \int_{\gamma} C_X \partial t + \beta \partial x + G_Y \partial z - G_Z \partial y + \\
&+ Ij \cdot \int_{\gamma} C_Y \partial t + \beta \partial y - G_X \partial z + G_Z \partial x + \\
&+ Ik \cdot \int_{\gamma} C_Z \partial t + \beta \partial z + G_X \partial y - G_Y \partial x.
\end{aligned} \tag{4}$$

Следовательно, интегрирование над числами M по кривой γ сводится, как и в комплексном случае, к сумме действительных интегралов.

Аналогично представим интеграл над листом большой переменной Λ по кривой Γ :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F(\Lambda) d\Lambda &= \int_{\Gamma} (\alpha + i \cdot C_X + j \cdot C_Y + k \cdot C_Z + \\
&+ Ii \cdot G_X + Ij \cdot G_Y + Ik \cdot G_Z) \times \\
&\times (\partial T + Ii \cdot \partial X + Ij \cdot \partial Y + Ik \cdot \partial Z)
\end{aligned} \tag{5}$$

Раскрывая скобки и выполняя умножение в соответствии с таблицей 1 умножения чисел M [6], интеграл (5) сведем к сумме действительных интегралов:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F(\Lambda) d\Lambda &= \int_{\Gamma} \alpha \partial T + G_X \partial X + G_Y \partial Y + G_Z \partial Z + \\
&+ i \cdot \int_{\Gamma} C_X \partial T - \beta \partial X - G_Y \partial Z + G_Z \partial Y + \\
&+ j \cdot \int_{\Gamma} C_Y \partial T - G_Z \partial X - \beta \partial Y + G_X \partial Z + \\
&+ k \cdot \int_{\Gamma} C_Z \partial T - \beta \partial Z - G_X \partial Y + G_Y \partial X + \\
&+ I \cdot \int_{\Gamma} \beta \partial T - C_X \partial X - C_Y \partial Y - C_Z \partial Z + \\
&+ Ii \cdot \int_{\Gamma} G_X \partial X + \alpha \partial X + C_Y \partial Z - C_Z \partial Y + \\
&+ Ij \cdot \int_{\Gamma} G_Y \partial T + \alpha \partial Y - C_X \partial Z - C_Z \partial X + \\
&+ Ik \cdot \int_{\Gamma} G_Z \partial T + \alpha \partial Z + C_X \partial Y - C_Y \partial X.
\end{aligned} \tag{6}$$

Основные свойства интегралов (3) и (5) следующие:

1. Линейность:

$$\int_{\gamma} (F_1 m_1 + F_2 m_2) d\lambda = m_1 \int_{\gamma} F_1 d\lambda + m_2 \int_{\gamma} F_2 d\lambda, \quad (7)$$

где m_1, m_2 – числа с листа малой переменной, $m_1, m_2 \subseteq \lambda$.

$$2. \int_{\gamma} F d\lambda = - \int_{-\gamma} F d\lambda. \quad (8)$$

$$3. \int_{\gamma_1} F d\lambda + \int_{\gamma_2} F d\lambda = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} F d\lambda. \quad (9)$$

Свойства 1-3 – вытекают из свойств сумм действительных интегралов (4) и (6) и устанавливаются непосредственной проверкой.

Аналогичным путем введем m -кратные интегралы (см., например, [7]). Определим m -кратный интеграл на m листах малых переменных λ^m как предел следующей суммы:

$$\begin{aligned} & \iiint_{\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \dots \gamma^m} \dots \int F(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \dots, \lambda^m) d\lambda^1 d\lambda^2 d\lambda^3 \dots d\lambda^m = \\ & = \int_{\gamma^{[m]}} F(\lambda^{[m]}) d\lambda^{[m]} = \\ & = \lim_{\substack{l^1 \rightarrow 0 \\ l^2 \rightarrow 0 \\ l^3 \rightarrow 0 \\ \dots \\ l^m \rightarrow 0}} \left[\sum_{n^1, n^2, n^3, \dots, n^m} F(\lambda^{[m]}) (\lambda_{n_1}^1 - \lambda_{n_1+1}^1) \times \right. \\ & \left. \times (\lambda_{n_2}^2 - \lambda_{n_2+1}^2) (\lambda_{n_3}^3 - \lambda_{n_3+1}^3) \dots (\lambda_{n_m}^m - \lambda_{n_m+1}^m) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

где l^k – максимальная длина элементарной дуги k -ой переменной при разбиении на отрезки точками n_k . $F(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \dots, \lambda^m)$ – функция m переменных. $\gamma^{[m]}$ – m - кривых на m листах малой переменной, заданных как параметрические функции от действительных параметров r^n со значением на n – ом листе переменной λ^n . Подставляя в (10) составляющие функции F и дифференциалов

$$d\lambda^k = i \cdot \partial x^k(r) + j \cdot \partial y^k(r) + k \cdot \partial z^k(r) + I \cdot \partial t^k(r) \quad (11)$$

в виде действительных и мнимых составляющих, с учетом таблицы умножения чисел M , этот интеграл сводим к вычислению действительных интегралов. Их свойства будут соответствовать свойствам (7)-(9) и свойствам действительных m -мерных интегралов.

Аналогично определим кратный интеграл на листах большой переменной $\Lambda^{[m]}$. Для выражения (10) примем следующую сокращенную запись кратного интеграла на листе большой переменной:

$$\int_{\Gamma^{[m]}} F(\Lambda^{[m]}) d\Lambda^1 d\Lambda^2 d\Lambda^3 \dots d\Lambda^m = \int_{\Gamma^{[m]}} F(\Lambda^{[m]}) d\Lambda^{[m]}. \quad (12)$$

Здесь: $\Gamma^{[m]}$ - m листов большой переменной Λ^n .

Введенные операции интегрирования будут использованы при разложениях в ряды и интегральных преобразованиях.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В качестве примера использования интегрирования рассмотрим определение коэффициентов разложения периодических функций над числами M в ряд. Так же рассмотрим аналог преобразования Фурье для непериодических функций над числами M .

Предварительно переопределим функцию $F(\lambda)$ с листа малой переменной λ на 4 листах малой переменной $\lambda = \lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4$ при следующих условиях:

$$F(\lambda) = F(\lambda^{[4]}) = F(\lambda^1 + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4), \quad (13)$$

$$\lambda^1 = i \cdot x, \quad \lambda^2 = j \cdot y, \quad \lambda^3 = k \cdot z, \quad \lambda^4 = I \cdot t. \quad (14)$$

Пусть имеется система функций $\{F_{n^{[4]}}\}$, $n^{[4]} = (n_x, n_y, n_z, n_t)$, где $n_v (v=x, y, z, t)$ — действительные функции. Ортогональность функций ряда определим следующим образом.

F_n и F_m ортогональны при $n \neq m$, если существует некоторая 4-область $\gamma^{[4]}$ на листах малой переменной, что выполняется равенство

$$F_n \bullet F_m = \int_{\gamma^{[4]}} F_n(\lambda^{[4]}) \cdot F_m(-\lambda^{[4]}) d\lambda^{[4]} = 0. \quad (15)$$

Примером ортогонального ряда является ряд из показательных функций над листом малой переменной. Для листа малой переменной показательная функция имеет вид [6]:

$$F_\omega(\lambda) = \exp(i \cdot \omega_x x + j \cdot \omega_y y + k \cdot \omega_z z + I \cdot \omega_t t), \quad (16)$$

где функция F_ω 4-периодична [8] с периодами 2π по каждой независимой переменной $x, y, z, \text{ и } t$.

Действительно, для функции $F_\omega(\lambda)$ следующие преобразования применимы:

$$\begin{aligned} F_{\omega_1}(\lambda) \bullet F_{\omega_2}(\lambda) &= \int_{\gamma^{[4]}} \exp(i\omega_{x_1}x + j\omega_{y_1}y + k\omega_{z_1}z + I \cdot \omega_{t_1}t) \times \\ &\times \exp(-i\omega_{x_2}x - j\omega_{y_2}y - k\omega_{z_2}z - I\omega_{t_2}t) d\lambda^{[4]} = \\ &= \int_{\gamma^{[4]}} \exp(i(\omega_{x_1} - \omega_{x_2})x + j(\omega_{y_1} - \omega_{y_2})y + \\ &+ k(\omega_{z_1} - \omega_{z_2})z + I(\omega_{t_1} - \omega_{t_2})t) d\lambda^{[4]} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{при } \omega_{x_1} \neq \omega_{x_2}, \omega_{y_1} \neq \omega_{y_2}, \omega_{z_1} \neq \omega_{z_2}, \omega_{t_1} \neq \omega_{t_2}, \\ i \cdot j \cdot k \cdot I \cdot (2\pi)^4 = \\ = -I \cdot (2\pi)^4 & \text{при } \omega_{x_1} = \omega_{x_2} = \omega_{y_1} = \omega_{y_2} = \\ = \omega_{z_1} = \omega_{z_2} = \omega_{t_1} = \omega_{t_2} = 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (17)$$

при выборе $\gamma^{[4]}$, равном участку 4-периодичности. При этом показательная подынтегральная функция представляется в виде произведения показательных функций от независимых переменных. Тогда интегрировать можно по каждой переменной независимо от других при учете только порядка интегрирования. Например, для переменной $I \cdot t$ на интервале от 0 до $I \cdot 2\pi$ имеем:

$$\int_0^{I \cdot 2\pi} \exp(I \cdot (\omega_{T1} - \omega_{T2})t) d(I \cdot t) = \begin{cases} 0, \omega_{T1} \neq \omega_{T2}, \\ I \cdot 2\pi, \omega_{T1} = \omega_{T2}. \end{cases} \quad (18)$$

Рассмотрим следующую задачу о возможности разложения функции $F(\lambda^{[4]})$ в ряд из показательных функций над листом малой переменной:

$$F(\lambda^{[4]}) = \sum_{\omega} A_{\omega} \exp(i \cdot \omega_x x + j \cdot \omega_y y + k \cdot \omega_z z + I \cdot \omega_t t), \quad (19)$$

где в (19) суммирование производится по всевозможным сочетаниям $\omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_t)$, определяющим экспоненциальные решения системы уравнений Максвелла для прямоугольного резонатора и являющиеся суммой электрических и магнитных функций [6].

Для определения соответствующих коэффициентов A_{ω} умножим уравнение (19) на соответствующие ортогональные функции справа и проинтегрируем на соответствующих интервалах. Тогда с учетом свойства ортогональности (17) ряда (19) получаем:

$$\frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[4]}} F \exp(-i \omega_x x - j \omega_y y - k \omega_z z - I \cdot \omega_t t) d\lambda^{[4]} = A_{\omega}, \quad (20)$$

для ряда над листами малой переменной. Теперь определенное таким образом значение для коэффициента A_{ω} подставим в ряд (19):

$$F(\lambda^{[4]}) = \sum_{\omega} \left(\frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[4]}} F \exp(-i \omega_x x - j \omega_y y - k \omega_z z - I \cdot \omega_t t) d\lambda^{[4]} \right) \times \exp(i \cdot \omega_x x + j \cdot \omega_y y + k \cdot \omega_z z + I \cdot \omega_t t) \quad (21)$$

На основе выражения (21) может быть определен аналог прямого и обратного преобразования Фурье по следующим выражениям:

$$\Psi(\omega) = \frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[4]}} F(\lambda^{[4]}) \exp(-i \cdot \omega_x x - j \cdot \omega_y y - k \cdot \omega_z z - I \cdot \omega_t t) d\lambda^{[4]}, \quad (22)$$

$$F(\lambda) = \sum_{\omega} \Psi(\omega) \exp(i \cdot \omega_x x + j \cdot \omega_y y + k \cdot \omega_z z + I \cdot \omega_t t). \quad (23)$$

В (23) $\omega = \omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_t)$.

Для получения интегрального обратного преобразования Фурье проведем преобразования, аналогичные описанным в [9]. Для этого перепишем уравнение (22) для периодов l произвольной длины:

$$l_x l_y l_z l_t \Psi(k) = \frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\lambda^{[4]}} F(\lambda^{[4]}) \exp\left(-i \cdot \frac{2\pi k_x}{l_x} - \right. \\ \left. - j \cdot \frac{2\pi k_y}{l_y} - k \cdot \frac{2\pi k_z}{l_z} - I \cdot \frac{2\pi k_t}{l_t}\right) d\lambda^{[4]} \quad (24)$$

Тогда ряд (23) перепишется в виде:

$$F(\lambda) = \sum_k l_x l_y l_z l_t \Psi(k) \exp(i \cdot 2\pi v_x x + j \cdot 2\pi v_y y + \\ + k \cdot 2\pi v_z z + I \cdot 2\pi v_t t) \Delta v^{[4]} \quad (25)$$

где: $v = \frac{k}{l}$, $\Delta v = \frac{k+1}{l} - \frac{k}{l} = \frac{1}{l}$. От суммы (25) при $l \rightarrow \infty$ получим интеграл:

$$F(\lambda) \sim \int_{v^{[4]}} \Psi(v) \exp(i \cdot 2\pi v_x x + j \cdot 2\pi v_y y + \\ + k \cdot 2\pi v_z z + I \cdot 2\pi v_t t) dv^{[4]}. \quad (26)$$

В (24) и в (25) экспоненты разлагаются на множители по каждой переменной и преобразования можно проводить независимо от других переменных, составляющих λ .

Рассмотрим Фурье – образ частной производной на листе малой переменной (22):

$$F'_x \sim \frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[4]}} F'_x(\lambda^{[4]}) \exp(-i \cdot \omega_x x - \\ - j \cdot \omega_y y - k \cdot \omega_z z - I \cdot \omega_t t) dx d\lambda^{[3]} \quad (27)$$

Интегрируя по частям, получаем:

$$F'_x \sim \frac{1}{I \cdot (2\pi)^4} \int_{\gamma^{[3]}} F(\lambda^{[4]}) \exp(-i \cdot \omega_x x - j \cdot \omega_y y - \\ - k \cdot \omega_z z - I \cdot \omega_t t) d\lambda^{[3]} \Big|_{x(r=\delta^1)}^{x(r=\chi^1)} - \frac{i \cdot \omega_x}{(2\pi)^4} \Psi(\omega). \quad (28)$$

В (28) первый член разности есть разность значений левого выражения на границах области γ по x и выражает граничные условия для частной производной в самом общем виде.

Свойство (28) дает возможность использования аналога преобразования Фурье для получения решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим другое представление ряда (19), которое можно использовать для более общего класса функций. В (19) члены ряда определяются действительными коэффициентами $\omega = \omega(\omega_x, \omega_y, \omega_z, \omega_t)$ при независимых переменных с листов малой переменной $\lambda^{[4]}$. Рассмотрим следующий ряд:

$$\begin{aligned}
F &= \sum_u A_u \exp(u\lambda) = \\
&= \sum_u A_u \exp((i \cdot u_x + j \cdot u_y + k \cdot u_z + I \cdot u_t) \times \\
&\times (i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z + I \cdot t)), \quad (29)
\end{aligned}$$

где: u – множитель с листа малой переменной. Физический смысл членов ряда (29) можно определить, если раскрыть скобки показателя экспоненты. Тогда:

$$F = \sum_u A_u \exp(u\lambda) = \sum_u A_u A^1 A^2 A^3, \quad (30)$$

где:

$$A^1 = \exp(-u_x x - u_y y - u_z z - u_t t), \quad (31)$$

$$A^2 = \exp(i \cdot (u_y z - u_z y) + j \cdot (u_z x - u_x z) + k \cdot (u_x y - u_y x)), \quad (32)$$

$$A^3 = \exp(Ii \cdot (u_x t + u_t x) + Ij \cdot (u_y t + u_t y) + Ik \cdot (u_z t + u_t z)). \quad (33)$$

Смысл множителя A^1 – экспоненциальное изменение в пространстве и времени; A^2 соответствует решению для прямоугольного резонатора [6] без временной зависимости с осями периодичности, развернутыми относительно осей x , y , и z соответственно; A^3 соответствует показательной функции на листе большой переменной, бегущей по пространственным осям. Множители (31) и (32) соответствуют экспофункциональным полям, введенным в [10].

Функция (29) является дифференцируемой. Действительно, для дифференцируемой функции $F(\lambda)$, являющейся решением системы уравнений Максвелла, справедлива система уравнений

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = 0, \quad (34)$$

или:

$$\begin{aligned}
&\frac{dF}{d(-i \cdot x - j \cdot y - k \cdot z + I \cdot t)} = \\
&= \frac{d(\exp(u\lambda))}{d(-i \cdot x - j \cdot y - k \cdot z + I \cdot t)} = u \frac{\partial}{\partial \lambda} \exp \lambda = u \cdot 0 \quad (35)
\end{aligned}$$

в силу дифференцируемости показательной функции.

Изучение общего решения системы уравнений Максвелла благодаря ее линейности, можно заменить изучением свойств экспоненциальных членов рядов (19) или (30), что упрощает задачу.

В заключение отметим, что интегрирование функций над числами M может быть использовано при получении и изучении решений системы уравнений Максвелла в рамках предложенного формализма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский Н.Н. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1978. – 543 с.
2. Иваницкий А.М. Обобщенный символический метод анализа электрических цепей. Учебное пособие. – Одесса: УГАС, 1994. – 27 с.
3. Иваницкий А.М. Комплексный анализ многомерных цепей/ ОЭИС. – Одесса, 1993 – 15 с. – Рус. - Деп. В ЦНТИ “Информсвязь” 06.04.93, №1961 – св.
4. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 488 с.
5. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977. – 504с.
6. Кравчик Ю.С. Обобщение комплексных чисел и их применение в электродинамике // Праці УНДІРТ. – 2003. - №4(36).
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.
8. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 318 с.
9. Ефимов А.В. Математический анализ. Ч. 1. – М.: Высшая школа, 1980. – 279 с.
10. Иваницкий А.М. Экспофункциональные поля // Наукові праці УДАЗ ім. О.С. Попова. – 2001. - №1. – С. 18-21.