Кравчик Ю.С.

Одесская национальная Академия связи им. А.С.Попова, соискатель, ЧП, Украина

ПРИМЕНЕНИЕ 3D-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Данная статья относится к электродинамике. Традиционные методы точного расчета электромагнитного поля посредством преобразования систем координат [1] позволяют рассчитать поле в ограниченном числе случаев, а приближенные методы не всегда отвечают техническим потребностям расчета электромагнитных устройств и систем. Поэтому цель данной статьи – предложить метод получения *3-D*-решений системы уравнений Максвелла на примерах получения решений вблизи ребристой структуры и поверхности 2-го порядка.

Будем искать такие *3-D*-преобразования, которые преобразуют решение системы уравнений Максвелла в решение.

Запишем систему уравнений Максвелла [1,2] в системе единиц СИ в следующем виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial E_Z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_Y}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial H_X}{\partial t} + \dfrac{\partial \beta}{\partial x} = 0, & (1) \\
-\dfrac{\partial E_Z}{\partial x} + \dfrac{\partial E_X}{\partial z} + \mu \dfrac{\partial H_Y}{\partial t} + \dfrac{\partial \beta}{\partial y} = 0, & (2) \\
\dfrac{\partial E_Y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_X}{\partial y} + \mu \dfrac{\partial H_Z}{\partial t} + \dfrac{\partial \beta}{\partial z} = 0, & (3) \\
\dfrac{\partial H_Z}{\partial y} - \dfrac{\partial H_Y}{\partial z} - \varepsilon \dfrac{\partial E_X}{\partial t} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} = 0, & (4) \\
-\dfrac{\partial H_Z}{\partial x} + \dfrac{\partial H_X}{\partial z} - \varepsilon \dfrac{\partial E_Y}{\partial t} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial y} = 0, & (5) \\
\dfrac{\partial H_Y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_X}{\partial y} - \varepsilon \dfrac{\partial E_Z}{\partial t} - \dfrac{\partial \alpha}{\partial z} = 0, & (6) \\
\dfrac{\partial E_X}{\partial x} + \dfrac{\partial E_Y}{\partial y} + \dfrac{\partial E_Z}{\partial z} - \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, & (7) \\
\dfrac{\partial H_X}{\partial x} + \dfrac{\partial H_Y}{\partial y} + \dfrac{\partial H_Z}{\partial z} - \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial \beta}{\partial t} = 0. & (8)
\end{cases}
$$

Где: $E_X, E_Y, E_Z, H_X, H_Y, H_Z$ – соответственно, составляющие электрического и магнитного полей, α и β, соответственно, электрический и магнитный потенциалы [2], x,y,z и t - пространственные и временная переменные. Следует учитывать, что представления магнитных и электрических потенциалов α и β могут меняться ролями вследствие симметрии перестановки между магнитным и электрическим полями [6]. В системе единиц Хэвисайда электрическая и магнитная проницаемости равны единице: $\varepsilon=\mu=1$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть задана функция - решение $F(x,y,z,t)$ системы уравнений Максвелла *(1)-(8)* и некоторое преобразование f системы координат:

$$f(x,y,z,t)=(x',y',z',t'), \qquad (9)$$

где: x',y',z' и t' новые пространственные и временная координаты.

Тогда при каких условиях функция $F(f)$ так же является решением системы уравнений Максвелла.

Или, другими словами, какие функции преобразования системы координат переводят решение системы уравнений Максвелла в решение, или, сокращенно, являются допустимыми преобразованиями.

В [2] предложены М-числа - вариант 8-мерного обобщения комплексных чисел. Их свойства выбраны так, что условия дифференцирования функций над ними (М-функций) тождественны системе уравнений Максвелла. Рассмотрим М-фнкции [2] как аналог комплексных функций. В случае комплексных функций допустимыми преобразованиями являются преобразования, которые сами удовлетворяют условиям Коши-Римана [4]. Рассуждая по аналогии, следует предположить, что в случае М-функций допустимыми преобразованиями являются функции, удовлетворяющие условиям дифференцирования, или уравнениям Максвелла. Следовательно, решения системы уравнений Максвелла с учетом двулистности значений следует рассматривать как преобразования системы координат следующего вида:

$$\lambda=(x,y,z,t)\xrightarrow{f}(x',y',z',t',X',Y',Z',T')=(E_X,E_Y,E_Z,\alpha,H_X,H_Y,H_Z,\beta)=\lambda'+\Lambda', \quad (10)$$

где: X',Y',Z',T' - пространственные и временная переменные листа Λ' большой переменной [2], λ' - лист малой переменной.

Следовательно, решением рассматриваемой задачи будет следующее утверждение. Сложная функция $F(f)$ принадлежит области решений системы уравнений Максвелла, если *F(λ)* и *f(λ)* принадлежат области решений системы уравнений Максвелла. Другим словами, сложная функция принадлежит области решений системы уравнений Максвелла, если ее составляющие функции принадлежат той же области.

Справедливость этого утверждения проверяется непосредственной проверкой в системе единиц Хэвисайда. Действительно, проверим сохранение первого уравнения (1) системы уравнений Максвелла. Его компоненты (1) при преобразовании (9) изменятся следующим образом:

$$\frac{\partial E_Z}{\partial y'} = \frac{\partial E_Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'}(1) + \frac{\partial E_Z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}(2) + \frac{\partial E_Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y'}(3) + \frac{\partial E_Z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y'}(4), \qquad (11)$$

$$-\frac{\partial E_Y}{\partial z'} = -\frac{\partial E_Y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z'}(4) - \frac{\partial E_Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z'}(3) - \frac{\partial E_Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial z'}(2) - \frac{\partial E_Y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z'}(1), \qquad (12)$$

$$\frac{\partial H_X}{\partial t'} = \frac{\partial H_X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'}(3) + \frac{\partial H_X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t'}(4) + \frac{\partial H_X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t'}(1) + \frac{\partial H_X}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'}(2), \qquad (13)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial x'} = \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}(2) + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}(1) + \frac{\partial \beta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'}(4) + \frac{\partial \beta}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'}(3). \qquad (14)$$

Здесь индексы (1)-(4) в круглых скобках означают члены суммы, которые будем группировать между собой. Тогда правые множители слагаемых с одинаковыми индексами равны между собой с точностью до действительного множителя, т.к. являются компонентами общего решения системы уравнений Максвелла. После группирования их можно вынести как равные множители за скобки. Получим сумму решений уравнений Максвелла с нулевыми результатами. Например, сумма составляющих с индексом (2) из (11)-(14) даст следующий результат:

$$\left(\frac{\partial E_Z}{\partial y} - \frac{\partial E_Y}{\partial z} + \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial H_X}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial y}{\partial y'} + \frac{\partial z}{\partial z'} + \frac{\partial t}{\partial t'}\right)\frac{1}{4} = 0 \qquad (15)$$

вследствие уравнения (7) системы уравнений Максвелла (1)-(8). Остальные составляющие дадут нулевую сумму вследствие условий (1)-(8). Например, следующие составляющие:

$$\frac{\partial E_Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial E_Z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial y}{\partial x'}\right) \equiv 0, \qquad (16)$$

образуют нулевую сумму. Действительно, $\frac{\partial E_Z}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y}$ вследствие (2), и $\frac{\partial x}{\partial y'} = -\frac{\partial y}{\partial x'}$ вследствие (3), т.к. ротор образует ненулевую комбинацию для электромагнитного поля. Если ротор образует нулевую комбинацию, то такая компонента не принадлежит электромагнитному полю, выпадает из области решений системы уравнений Максвелла и не участвует в электромагнитной индукции [3].

Аналогично проверяется выполнение других уравнений системы уравнений Максвелла (1)-(8). Хотя, достаточно проверки для одного уравнения, поскольку остальные уравнения первой пары системы уравнений Максвелла тождественны между собой с точностью до преобразования из группы поворота на 90° или применения группы преобразования *E→H→(-E).*

Доказанное свойство решений системы уравнений Максвелла используем для получения новых решений. Рассмотрим это на следующих примерах.

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ 3-D РЕШЕНИЙ В ПОПЕРЕЧНО-ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУТАХ

Ранее в работе [3] рассматривались примеры получения Т-решений системы уравнений Максвелла с использованием комплексных функций. Рассмотрим примеры получения существенно трехмерных решений с использованием комплексных функций как частного и упрощенного случая *3-D*-преобразования.

Пусть задана комплексная функция *f(x,y)*, удовлетворяющая условиям Коши-Римана [4], отображающая некоторую область *(x,y)* на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости (x',y'):

$$f(x,y) = (x',y'). \qquad (17)$$

Экспоненциальная функция *exp(λ)* М-аргумента может рассматриваться как функция, отображающая верхнее полупространство в область 4-куба значений [2]. Функция *exp(λ)* определяет множество решений в виде электрических и магнитных функций для прямоугольного резонатора [1,2], а так же для верхнего полупространства над проводящей плоскостью вследствие выполнения граничных условий [1]. Поэтому сложная функция $\exp(x',y',z,t)$ так же будет решением системы уравнений Максвелла для некоторой поперечно-однородной структуры, сечение которой определяет функция $f(x,y)$. При этом функция $f(x,y)$ отображает некоторую область на верхнюю полуплокость комплексной плоскости.

В качестве примера рассмотрим комплексную функцию $f^{-1}(x,y)$, преобразующую верхнюю полуплоскость комплексного пространства на полуплоскость с установленными на ней равноотстоящими ребрами [4,5]. Обратную ей комплексную функцию $f(x,y)$ представим в следующем виде:

$$f(x+i\cdot y)=\arccos\left(\frac{1}{a}\cos(x+i\cdot y)\right)=(x'+i\cdot y'), \qquad (18)$$

где: a – действительный параметр задачи, i - мнимая единица.

Функцию $f(x,y)$ (18) будем трактовать не как Т-поле [5], а как функцию, описывающую преобразование $(x,y)\to(x',y')$ [4].

Тогда следующая функция будет $3\text{-}D$-решением для исходной области:

$$\begin{aligned}&\exp(\lambda')=\exp(i\cdot x'+j\cdot y'+k\cdot z+I\cdot t)=\exp((x'+k\cdot y')\cdot i+k\cdot z+I\cdot t)=\\&=\exp(f(x+k\cdot y)\cdot i+k\cdot z+I\cdot t)=\exp\left(\left(\arccos\frac{1}{a}\cos(x+k\cdot y)\right)\cdot i+k\cdot z+I\cdot t\right). \qquad (19)\end{aligned}$$

Где: i,j,k – кватернионные мнимые единицы, I – коммутативная мнимая единица [2].

Функцию $arcos(x+iy)$ нельзя представить в конечном виде в виде суммы действительной и мнимой составляющей. Поэтому для ее вычисления воспользуемся разложением в степенной ряд с тремя членами [5]:

$$\begin{aligned}&\exp(\lambda')\approx\exp\{\ \{\ \frac{1}{a}\sin(x)ch(y)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}\right)^3\sin^3(x)ch^3(y)-\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^3\sin(x)ch(y)\cos^2(x)sh^2(y)+k\cdot[(-\frac{1}{a})\cos(x)sh(y)-\\&-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^3\sin^2(x)ch^2(y)\cos(x)sh(y)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}\right)^3\cos^3(x)sh^3(y)]\ \}\cdot i+k\cdot z+I\cdot t\ \}=\\&=\exp\{\{x'+k\cdot y'\ \}\cdot i+k\cdot z+I\cdot t\}. \qquad (20)\end{aligned}$$

После этого определим решение для данной задачи, представив экспоненциальную функцию через аналоги формулы Эйлера [2]:

$$
\begin{aligned}
&\exp(\lambda') = (\cos x' + i \cdot \sin x')(\cos y' + j \cdot \sin y') \times \\
&\times (\cos z' + k \cdot \sin z')(\cos t' + I \cdot \sin t') = \\
&= \cos t' \cos x' \cos y' \cos z' - \cos t' \sin x' \sin y' \sin z' + \\
&+ i \cdot (\cos t' \sin x' \cos y' \cos z' + \cos t' \cos x' \sin y' \sin z') + \\
&+ j \cdot (\cos t' \cos x' \sin y' \cos z' - \cos t' \sin x' \cos y' \sin z') + \\
&+ k \cdot (\cos t' \cos x' \cos y' \sin z' + \cos t' \sin x' \sin y' \cos z') + \\
&+ I \cdot (\sin t' \cos x' \cos y' \cos z' - \sin t' \sin x' \sin y' \sin z') + \qquad (21) \\
&+ Ii \cdot (\sin t' \sin x' \cos y' \cos z' + \sin t' \cos x' \sin y' \sin z') + \\
&+ Ij \cdot (\sin t' \cos x' \sin y' \cos z' - \sin t' \sin x' \cos y' \sin z') + \\
&+ Ik \cdot (\sin t' \cos x' \cos y' \sin z' + \sin t' \sin x' \sin y' \cos z') = \\
&= \alpha' + i \cdot E'_X + j \cdot E'_Y + k \cdot E'_Z + I \cdot \beta' + Ii \cdot H'_X + Ij \cdot H'_Y + Ik \cdot H'_Z,
\end{aligned}
$$

где: x' и y' определяются из (20), $z'=z, t'=t$.

Составляющие действительная и мнимые компоненты (21) представляют компоненты электрического и магнитного полей и потенциалов.

Полный спектр решений в виде электрических и магнитных функций определяется численно после введения размерностных и амплитудных коэффициентов в формулу (21) и подстановки ее компонент в систему уравнений Максвелла, записанную в системе единиц СИ (1)-(8), где ε и μ не равны единице.

Граничные условия для функции (19) запишем в следующем виде аналогично [1]:

$$
\arccos\left(\frac{1}{a}\cos(x + i \cdot y)\right) \cdot i + k \cdot z = \left(m_X \pi x + k \cdot m_Y \pi y\right) \cdot i + k \cdot m_Z \pi z. \qquad (22)
$$

Где: m_X, m_Y ,m_Z – целочисленные параметы, определяющие границы ячеек, на которые разбивается область с ребрами и проводящей плоскостью. В каждой ячейке присутствует спектр электрических и магнитных функций, аналогичных прямоугольному резонатору с учетом их преобразования по выражению (18). В случае представления функции *arccos* в ряд с тремя членами, получим следующее уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\{ \ \frac{1}{a}\sin(x)ch(y) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}\right)^3 \sin^3(x)ch^3(y) - \\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^3 \sin(x)ch(y)\cos^2(x)sh^2(y) + k \cdot [(-\frac{1}{a})\cos(x)sh(y) -
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\right)^3 \sin^2(x)ch^2(y)\cos(x)sh(y)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a}\right)^3 \cos^3(x)sh^3(y)] \ \}\cdot i+k\cdot z= \qquad (23)$$
$$= i\cdot x'+j\cdot y'+k\cdot z=$$
$$=\left(m_X\pi x+k\cdot m_Y\pi y\right)\cdot i+k\cdot m_Z\pi z.$$

В случае прямоугольного резонатора, это прямоугольные клетки, которыми режется верхнее полупространство на ячейки прямоугольных резонаторов. В случае (20)-(23) – это некоторые цилиндрические поверхности. Заметим без доказательства, что решение (18)-(21) вместе с решением [5] образуют между собой ортогональную систему функций аналогично тому, как поперечная однородная волна и решение для прямоугольного резонатора являются ортогональными и собственными функциями в полупространстве над плоской проводящей поверхностью.

Данный пример показывает возможность получения 3-D решений с использованием двумерных преобразований.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Определение компонент электромагнитного поля в конечном виде возможно только в простейших случаях. В более сложных случаях представление электромагнитного поля в виде координатных составляющих требует разложения в степенной ряд. Поэтому из всех членов ряда рассмотрим линейную и квадратичную составляющие разложения и выясним их характеристики как полевого решения и геометрического преобразования системы координат.

Рассмотрим следующую линейную М – функцию *f(λ)*:

$$\begin{aligned}
&f(\lambda)=\lambda A=(i\cdot x+j\cdot y+k\cdot z+I\cdot t)(i\cdot a+j\cdot b+k\cdot c+I\cdot d)=\\
&=(-ax-by-cz-dt)+i\cdot(cy-bz)+j\cdot(az-cx)+k\cdot(bx-ay)+\\
&+I\cdot 0+Ii\cdot(dx+at)+Ij\cdot(dy+bt)+Ik\cdot(dz+ct)= \qquad (24)\\
&=\alpha+i\cdot H_X+j\cdot H_Y+k\cdot H_Z+Ii\cdot(-E_X)+Ij\cdot(-E_Y)+Ik\cdot(-E_Z)=\\
&=T'+i\cdot x'+j\cdot y'+k\cdot z'+Ii\cdot X'+Ij\cdot Y'+Ik\cdot Z',
\end{aligned}$$

где: *a,b,*с и *d* – действительные параметры.

Подстановка составляющих электромагнитного поля (24) в систему уравнений Максвелла (1)-(8) в системе единиц Хэвисайда, как нетрудно проверить, дает тождество. Такое поле имеет следующий физический смысл. Электрическая составляющая *E* (24) и электрический потенциал α линейно изменяются во времени и пространстве. Магнитная составляющая H перпендикулярна электрической и постоянна во времени.

Рассмотрим (24) как системы преобразования координат двух видов. Первый вариант $\lambda \to \lambda'$ преобразования по (10) и (24) соответствует повороту координатных осей:

$$i \cdot x + j \cdot y + k \cdot z = \lambda \to \lambda' = i \cdot (cy - bz) + j \cdot (az - cx) + k \cdot (bx - ay). \qquad (25)$$

Второй вариант $\lambda \to \Lambda'$ преобразования по (10) и (24) соответствует переходу к движущейся системе координат с соответствующим изменением масштаба временной координаты и соответствует преобразованию Лоренца [2]:

$$\lambda \to \Lambda' = (-ax - by - cz - dt) + Ii \cdot (dx + at) + Ij \cdot (dy + bt) + Ik \cdot (dz + ct). \qquad (26)$$

Следующей рассмотрим вариант квадратичной функции:

$$\begin{aligned}
&F(\lambda) = \lambda(\lambda A) = -x(cy - bz) - y(az - cx) - z(bx - ay) + \\
&+ i \cdot \big(x(-ax - by - cz - dt) - z(az - cx) + y(bx - ay) - t(dx + at)\big) + \\
&+ j \cdot \big(y(-ax - by - cz - dt) + z(cy - bz) - x(bx - ay) - t(dy + bt)\big) + \\
&+ k \cdot \big(z(-ax - by - cz - dt) - y(cy - bz) + x(az - cx) - t(dz + ct)\big) + \qquad (27) \\
&+ I \cdot \big(t(-ax - by - cz - dt) - x(dx + at) - y(dy + bt) - z(dz + ct)\big) + \\
&+ Ii \cdot \big(t(cy - bz) + y(dz + ct) - z(dy + bt)\big) + \\
&+ Ij \cdot \big(t(az - cx) + z(dx + at) - x(dz + ct)\big) + \\
&+ Ik \cdot \big(t(bx - ay) - y(dx + at) + x(dy + bt)\big) = \\
&= T' + i \cdot x' + j \cdot y' + k' \cdot z' + I \cdot t' + Ii \cdot X' + Ij \cdot Y' + Ik \cdot Z' = \lambda' + \Lambda'.
\end{aligned}$$

Компоненты функции (27) записаны в системе единиц Хэвисайда. Рассмотрим функцию (27) как представление электромагнитного поля. Для перехода в систему единиц СИ необходимо ввести размерностные и амплитудные коэффициенты с учетом соответствия составляющих функции и составляющих электромагнитного поля [2]:

$$
\begin{aligned}
&F(\lambda)=\lambda(\lambda A)=\alpha_0(-n_X x(cn_Y y-bn_Z z)-n_Y y(an_Z z-cn_X x)-\\
&-n_Z z(bn_X x-an_Y y)+\\
&+i\cdot H_{X0}\begin{pmatrix} n_X x(-an_X x-bn_Y y-cn_Z z-d\omega t)-\\ -n_Z z(an_Z z-cn_X x)+n_Y y(bn_X x-an_Y y)-\omega t(dn_X x+a\omega t)\end{pmatrix}+\\
&+j\cdot H_{Y0}\begin{pmatrix} n_Y y(-an_X x-bn_Y y-cn_Z z-d\omega t)+\\ +n_Z z(cn_Y y-bn_Z z)-n_X x(bn_X x-an_Y y)-\omega t(dn_Y y+b\omega t)\end{pmatrix}+\\
&+k\cdot H_{Z0}\begin{pmatrix} n_{Z0} z(-an_X x-bn_Y y-cn_Z z-d\omega t)-\\ -n_Y y(cn_Y y-bn_Z z)+n_X x(an_Z z-cn_X x)-\omega t(dn_Z z+c\omega t)\end{pmatrix}+\\
&+I\cdot\beta_0\begin{pmatrix} \omega t(-an_X x-bn_Y y-cn_Z z-d\omega t)-\\ -n_X x(dn_X x+a\omega t)-n_Y y(dn_Y y+b\omega t)-n_Z z(dn_Z z+c\omega t)\end{pmatrix}-\\
&-Ii\cdot E_{X0}\big(\omega t(cn_Y y-bn_Z z)+n_Y y(dn_Z z+c\omega t)-n_Z z(dn_Y y+b\omega t)\big)-\\
&-Ij\cdot E_{Y0}\big(\omega t(an_Z z-cn_X x)+n_Z z\big(dn_X x+a\omega t\big)-n_X x(dn_Z z+c\omega t)\big)-\\
&-Ik\cdot E_{Z0}\big(\omega t(bn_X x-an_Y y)-n_Y y(dn_X x+a\omega t)+n_X x(dn_Y y+b\omega t)\big).
\end{aligned}
$$

Где: n_X, n_Y, n_Z, ω – размерностные действительные коэффициенты, H_{X0}, H_{Y0}, H_{Z0}, E_{X0}, E_{Y0}, E_{Z0} – амплитудные действительные коэффициенты.

Подстановка составляющих (28) в систему уравнений Максвелла, записанную в системе единиц СИ (1)-(8) дает следующие соотношения:

$$
\begin{cases}
E_{Z0}n_Y+E_{Y0}n_Z=\mu H_{X0}\omega,\\
E_{Z0}n_X+E_{X0}n_Z=\mu H_{Y0}\omega,\\
E_{Y0}n_X+E_{X0}n_Z=\mu H_{Z0}\omega,\\
H_{Y0}n_Z=\varepsilon E_{X0}\omega,\\
H_{Z0}n_Y=\varepsilon E_{X0}\omega,\\
H_{X0}n_Y=\varepsilon E_{Z0}\omega,\\
H_{Y0}n_X=\varepsilon E_{Z0}\omega,\\
H_{X0}n_Z=\varepsilon E_{Y0}\omega,\\
H_{Z0}n_X=\varepsilon E_{Y0}\omega,\\
-2H_{X0}n_X+H_{Y0}n_Y+H_{Z0}n_Z=0,\\
-2H_{Y0}n_Y+H_{X0}n_X+H_{Z0}n_Z=0,\\
-2H_{Z0}n_Z+H_{X0}n_X+H_{Y0}n_Y=0,\\
d(H_{X0}n_X+H_{Y0}n_Y+H_{Z0}n_Z)=0.
\end{cases}
\tag{29}
$$

Из (29) получим следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&E_{X0}=E_{Y0}=E_{Z0}=E_0,\\
&H_{X0}=H_{Y0}=H_{Z0}=H_0,\\
&d=\alpha_0=\beta_0=0,\\
&n_X=n_Y=n_Z=n,\\
&\frac{2n^2}{\omega^2}=\varepsilon\mu.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Рассмотрим функцию (27) как два варианта преобразования системы координат. Первый из них соответствует преобразованию листа малой переменной на лист малой переменной [2]:

$$
\begin{aligned}
& i\cdot x + j\cdot y + k\cdot z + I\cdot t = \lambda \to \lambda' = \\
& = i\cdot\big(x(-ax-by-cz-dt) - z(az-cx) + y(bx-ay) - t(dx+at)\big) + \\
& + j\cdot\big(y(-ax-by-cz-dt) + z(cy-bz) - x(bx-ay) - t(dy+bt)\big) + \\
& + k\cdot\big(z(-ax-by-cz-dt) - y(cy-bz) + x(az-cx) - t(dz+ct)\big) + \\
& + I\cdot\big(t(-ax-by-cz-dt) - x(dx+at) - y(dy+bt) - z(dz+ct)\big) +
\end{aligned}
\qquad (31)
$$

Второй вариант преобразования соответствует преобразованию листа малой переменной на лист большой переменной [2]:

$$
\begin{aligned}
& i\cdot x + j\cdot y + k\cdot z + I\cdot t = \lambda \to \Lambda' = \\
& = -x(cy-bz) - y(az-cx) - z(bx-ay) + \\
& + Ii\cdot\big(t(cy-bz) + y(dz+ct) - z(dy+bt)\big) + \\
& + Ij\cdot\big(t(az-cx) + z(dx+at) - x(dz+ct)\big) + \\
& + Ik\cdot\big(t(bx-ay) - y(dx+at) + x(dy+bt)\big).
\end{aligned}
\qquad (32)
$$

На основе квадратичных преобразований (31) и (32) возможно получение новых решений системы уравнений Максвелла. В качестве примера запишем показательные функции:

$$F_1(\lambda) = \exp(\lambda'), \qquad (33)$$
$$F_2(\lambda) = \exp(\Lambda'). \qquad (34)$$

Представляя показательные функции (33) и (34) аналогами формулы Эйлера [2] (21), с учетом значений штрихованных переменных (31) и (32), получим покомпонентное представление функций F_1 и F_2. В этом случае компоненты электромагнитного поля записываются в конечном разделенном виде. Свойства решений (33) и (34) (и (28)) требуют отдельного рассмотрения. Здесь заметим, что эти решения не стационарны – все компоненты и характеристики смещаются во времени. Определение граничных условий для функций (33) и (34) позволяет определить поверхности выполненных граничных условий [5], вдоль которых возможно выкладывание проводящих поверхностей. Граничные условия определяются из следующих уравнений для функции (33):

$$
\begin{cases}
\big(x(-ax-by-cz-dt) - z(az-cx) + y(bx-ay) - t(dx+at)\big) = m_X \pi x, \\
\big(y(-ax-by-cz-dt) + z(cy-bz) - x(bx-ay) - t(dy+bt)\big) = m_Y \pi y, \\
\big(z(-ax-by-cz-dt) - y(cy-bz) + x(az-cx) - t(dz+ct)\big) = m_Z \pi z.
\end{cases}
\qquad (35)
$$

Для функции (34) граничные условия будут аналогичными с учетом (32):

$$\begin{cases} \big(t(cy-bz)+y(dz+ct)-z(dy+bt)\big)=m_X\pi x, \\ (t(az-cx)+z(dx+at)-x(dz+ct))=m_Y\pi y, \\ (t(bx-ay)-y(dx+at)+x(dy+bt))=m_Z\pi z. \end{cases} \qquad (36)$$

Как видно из (35) и (36), поверхности будут смещаться во времени, т.к. зависят от t как от параметра. Следовательно, граничные условия, выполненные в один момент времени, не будут выполняться через некоторое время. Поэтому выполнение граничных условий можно считать выполненными только условно (приближенными) или в фиксированный момент времени. Через некоторый промежуток времени граничные условия могут выполниться снова. Вследствие этого электромагнитное поле при выполнении граничных условий будет распространяться в таком волноводе с малым затуханием, а при их нарушении – с большим. Это должно приводить к амплитудной модуляции электромагнитного поля.

Описанное решение позволяет точно рассчитать электромагнитное поле вблизи поверхности 2-го порядка.

Аналогично выше изложенному, можно получить покомпонентное представление других функций целой степени n, например, вида:

$$f(\lambda)=\lambda^n(\lambda A). \qquad (36)$$

Такие решения хотя и достаточно громоздки, но могут быть получены в конечном виде.

Описанный метод получения 3-D-решений путем использования сложных М-функций и преобразований систем координат позволяет получать новые преобразования и решения системы уравнений Максвелла и расширяет возможности их точного расчета. В том случае, когда эти преобразования обратимы, повторное применение прямого и обратного преобразования эквивалентно единичному преобразованию. В этом случае такое преобразование образует группу преобразований [5]. Так как предложенные преобразования почти всегда обратимы, то они увеличивают число собственных групповых преобразований системы уравнений Максвелла. Это позволяет неограниченно расширять число точных решений системы уравнений Максвелла.

Литература:

1. Никольский Н.Н. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1978. – 543 с.
2. Кравчик Ю.С. Обобщение комплексных чисел и их применение в электродинамике // Праці УНДІРТ. – 2003. - №4(36).
3. Кравчик Ю.С. Метод введения неэлектромагнитных полей в электромагнитную теорию Максвелла // ПраціУНДІРТ. – 2002. - №1(29). – С 52 – 57.
4. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982. – 488 с.
5. Кравчик Ю. С. Применение группового двумерного преобразования для получения Т- решений однородной системы уравнений Максвелла // Mat. The science: theory and practice 2005. V.26. Eng. Science. Pb. House. Praga, 2005 – с 31-34.
6. Фушич В.И., Никитин Ф.Г. Симметрия уравнений Максвелла. – Киев: Наукова думка, 1983. – 200 с.